

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III. Fonctions de transfert et schéma blocs

A.III.1 Fonction de transfert d'un système dans le domaine de Laplace

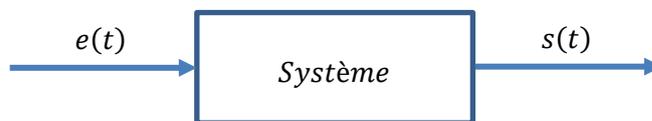
A.III.1.a Détermination de la fonction de transfert

A.III.1.a.i Principe

Le système représenté par le modèle introduit précédemment :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e$$

Se représente ainsi :



Supposons que toutes les conditions initiales sont nulles. Cette condition est appelée « **condition de Heaviside** ».

Appliquons la transformation de Laplace à son modèle :

$$\mathcal{L}\left(a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s\right) = \mathcal{L}\left(b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e\right)$$

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

On introduit donc la fonction de transfert FT (ou transmittance) $H(p)$ telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$N(p)$ est le numérateur de $H(p)$

$D(p)$ est le dénominateur de $H(p)$

La relation entrée/sortie du système dans le domaine de Laplace se met sous la forme :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

$H(p)$ représente de manière intrinsèque (indépendante de l'entrée) le comportement du système. Elle est caractéristique du système, qu'elle représente mathématiquement. C'est une fraction rationnelle en p .

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

Si l'on explicite les racines réelles et complexes des polynômes numérateur (z_i) et dénominateur (p_i), on peut écrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = k \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} ; \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

- z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes)
- p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes)
- Le degré de $D(p)$ est appelé **ordre** de la fonction de transfert ou du système
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée **équation caractéristique**

Selon les valeurs des coefficients a_i et b_i , $D(p)$ et $N(p)$ présentent des 0 soit nuls, soit réels ou complexes.

A.III.1.a.ii *Forme générale à connaître*

D'une manière générale, indépendamment des coefficients n et m introduits au paragraphe précédent, on montre que toute fonction de transfert se met sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{p^\alpha \prod_{k=1}^{n-\alpha} \left(1 - \frac{p}{p_k}\right)}$$

- α est la classe de la fonction de transfert
- n est l'ordre de la fonction de transfert
- Le facteur constant K est appelé **gain statique** du système. On l'obtient en multipliant la FT par p^α et en faisant tendre p vers 0. L'unité du gain statique est telle que $\frac{[s(t)]}{[e(t)]} = \frac{[K]}{s^{-\alpha}}$, soit $[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]} s^{-\alpha}$

Remarques :

- Il est nécessaire d'avoir des conditions initiales nulles pour former la fonction de transfert d'un système.
- La connaissance de la fonction de transfert d'un système suffit à le décrire complètement

Dernière mise à jour 04/10/2017	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	--	-------------------------

A.III.1.b Fonctions de transfert des composants

Traisons deux exemples :

A.III.1.b.i Résistance

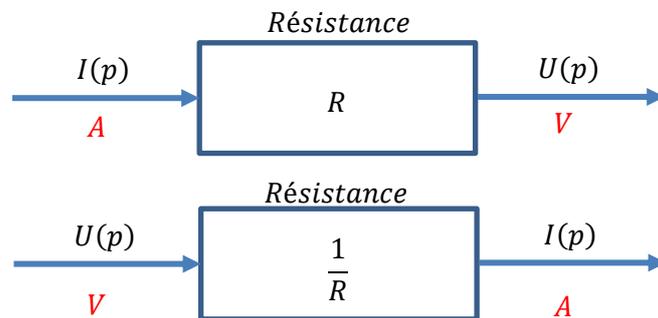
L'équation qui met en relation tension et intensité aux bornes d'une résistance s'écrit :

$$u(t) = Ri(t)$$

Dans le domaine de Laplace, on a :

$$U(p) = RI(p)$$

On représente la fonction de transfert du système ci-dessous selon le choix de ce qui est en entrée et en sortie :



Dans le cas d'une constante (indépendant de p), on appelle la fonction de transfert un **GAIN**, on parle aussi de gain pur.

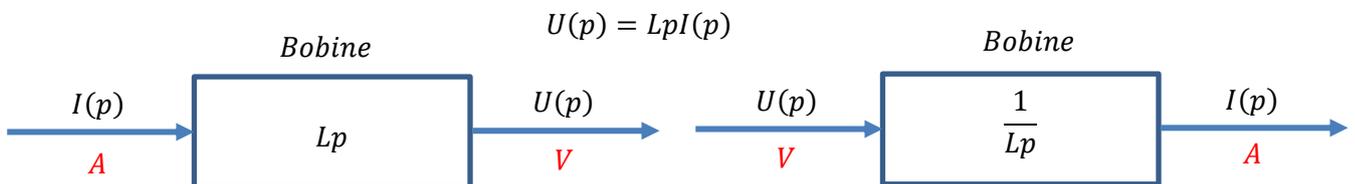
On parlera donc ici d'une résistance de gain R .

A.III.1.b.ii Bobine

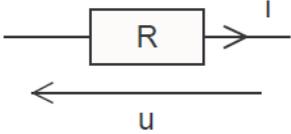
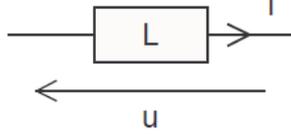
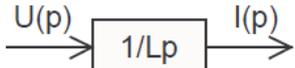
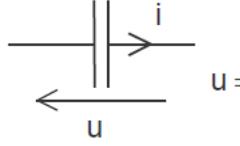
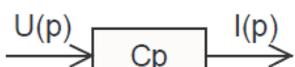
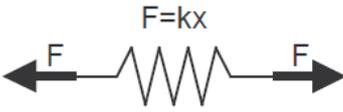
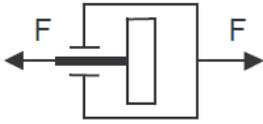
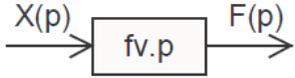
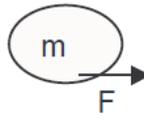
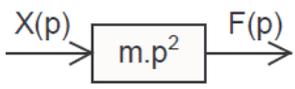
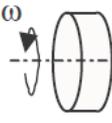
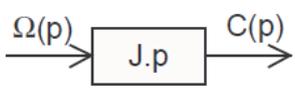
L'équation qui met en relation tension et intensité aux bornes d'une bobine s'écrit :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles :



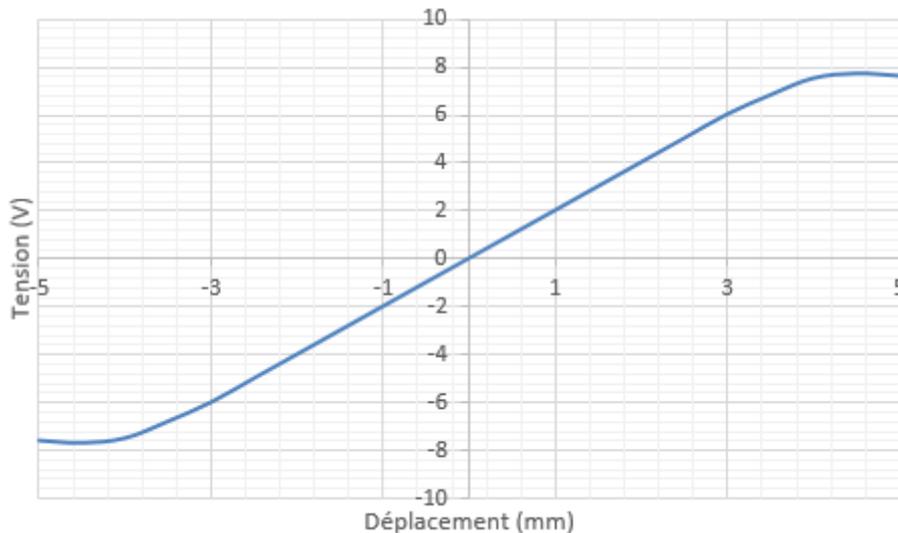
A.III.1.b.iii Fonctions de transfert usuelles

Résistance	 $u = Ri$	 
Inductance	 $u = L \frac{di}{dt}$	 
Condensateur	 $u = \frac{1}{C} \int i dt$	 
Ressort	 $F = kx$	 
Frottement visqueux (amortisseur)	 $F = f_v \frac{dx}{dt}$	
Masse	 $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$	
Inertie en rotation	 $C = J \frac{d\omega}{dt}$	

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.b.iv Linéarisation d'un comportement

Il arrive fréquemment qu'un composant présente un comportement linéaire sur une plage de variation de ses grandeurs puis que cette relation devienne plus complexe. Prenons par exemple un capteur dont la tension de sortie $u(t)$ varie en fonction de la position mesurée $x(t)$ comme suit :

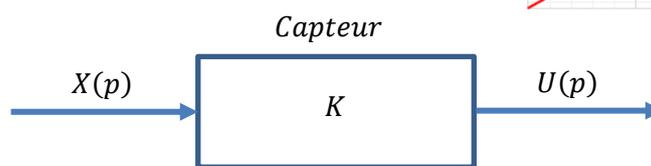
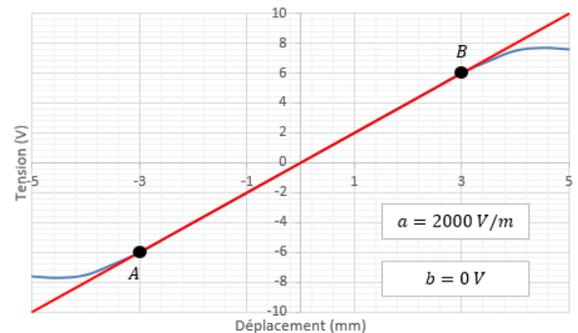


Si les déplacements mesurés restent dans la plage de variation $[-3; 3]$ mm, la fonction de transfert du capteur peut être assimilée à un gain K pur tel que

$$u(t) = Kx(t) \forall x \in [-3; 3]$$

On a alors :

$$U(p) = KX(p)$$



Attention à exprimer le gain dans les unités du système international :

$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - (-6)}{3 - (-3)} = 2 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1} = 2000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

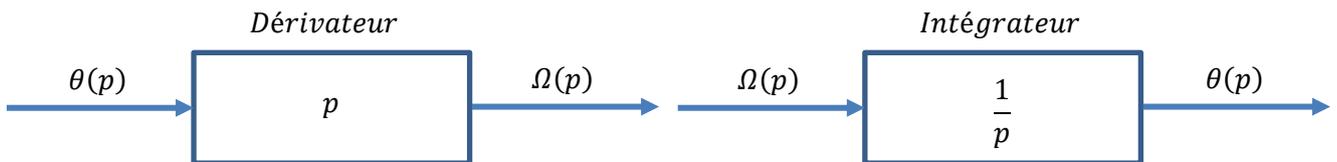
Ce que nous venons de faire s'appelle la **linéarisation du comportement d'un système**.

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.b.v Intégrateur et dérivateur

Deux fonctions de transfert sont à connaître, elles permettent de passer de la donnée d'une fonction à sa dérivée (dérivateur) ou de la fonction à sa primitive (intégrateur). Attention, ces deux blocs sont les deux seuls blocs qui ne représentent pas d'éléments physiques d'un système. Donnons l'exemple pour une vitesse de rotation Ω et la position angulaire associée θ :

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad ; \quad \Omega(p) = p\theta(p)$$



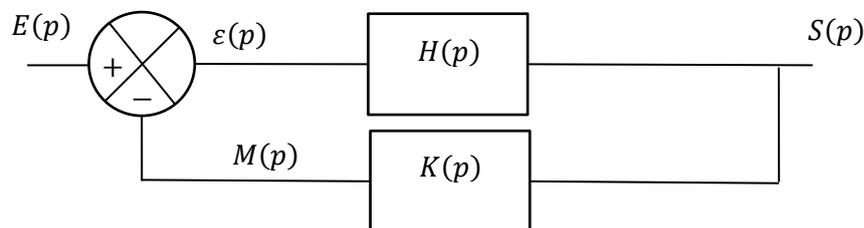
Remarques :

- Multiplier par p est homogène à une division par des secondes (dérivation temporelle)
- Diviser par p est homogène à une multiplication par des secondes (intégration temporelle)

A.III.1.c Fonction de transfert d'un système bouclé

A.III.1.c.i Représentation

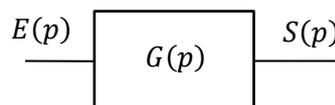
Soit un système en boucle fermée (avec retour) représenté par le schéma bloc suivant :



La fonction de transfert associée à ce système est :

$$FTBF(p) = G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On peut modéliser le système étudié à l'aide d'un seul bloc représentant la relation entre entrée et sortie.



Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.c.ii FTBF

$$\begin{cases} S(p) = H(p)\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - K(p)S(p) \end{cases}$$

$$S(p) = H(p)[E(p) - K(p)S(p)]$$

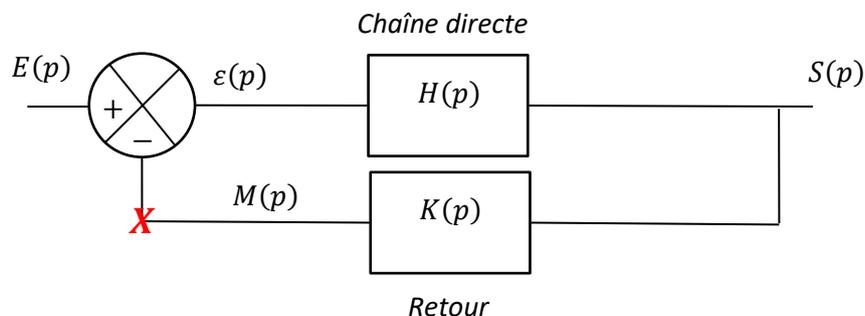
$$(1 + K(p)H(p))S(p) = H(p)E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

Formule de Black

On peut exprimer la *FTBF* en fonction de la *FTBO* du système : Fonction de Transfert en Boucle Ouverte et de la chaîne directe.

La *FTBO* est la fonction de transfert du système lorsqu'il est en boucle ouverte, c'est-à-dire lorsque l'on coupe fictivement la boucle au niveau du comparateur :



$$FTBO(p) = \text{Chaîne directe}(p) * \text{Retour}(p)$$

Dans le cas de la boucle ouverte, la *FTBO* représente la relation entre l'entrée et la sortie fictive de la boucle ouverte (c'est une définition), soit :

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = H(p)K(p)$$

Remarque : Si d'autres blocs sont présents entre $\varepsilon(p)$ et $M(p)$, on les prend donc en compte également

La chaîne directe est la chaîne qui va directement de l'entrée à la sortie sans considérer le retour :

$$\text{Chaîne directe}(p) = H(p)$$

Remarque : Si plusieurs blocs sont en série dans la chaîne directe, on doit tous les prendre en compte.

Finalement :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{Chaîne directe}(p)}{1 + FTBO(p)}$$

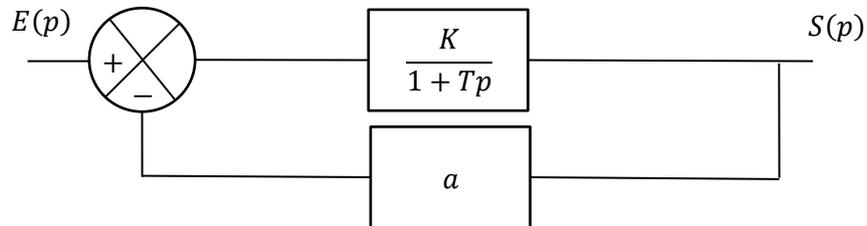
Remarque: $1 + FTBO(p)$ est le polynôme caractéristique du système. Il permet de rechercher les pôles de la fonction de transfert.

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.c.iii Forme à obtenir

Lors du calcul d'une FTBF, ne pas garder de quotients de quotients de polynômes. Simplifier le plus possible la fonction de transfert afin d'obtenir un quotient simple.

Exemple :



$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1+Tp}}{1 + a \frac{K}{1+Tp}}$$

Ne pas garder la fonction de transfert sous cette forme, mais plutôt :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp + aK}$$

Voire mieux, regrouper les termes selon les puissances de p :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + aK) + Tp}$$

Si c'est demandé, on pourra alors proposer la forme canonique :

$$G(p) = \frac{\frac{K}{1+aK}}{1 + \frac{T}{1+aK}p}$$

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.d Propriétés des schémas blocs

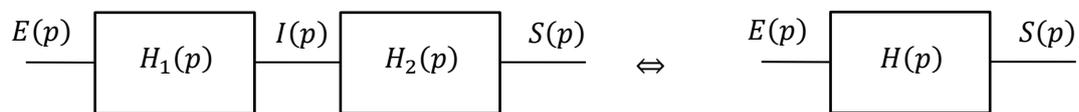
Lors de la mise en place d'un schéma bloc, on représente le système réel sous forme de différents blocs. La représentation obtenue est alors une représentation correspondant au système physique étudié.

Dans ce paragraphe, nous allons voir différents outils permettant de modifier la forme des schémas blocs. Il faut bien avoir en tête que ces modifications ne sont que des outils permettant de décrire les mêmes relations entre entrée et sortie, mais conduisent à une représentation non physique du système.

A.III.1.d.i Association de blocs en série

Considérons le système constitué de deux sous-systèmes en série de fonction de transfert respectif $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Ce système est équivalent à un seul système de fonction de transfert

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$



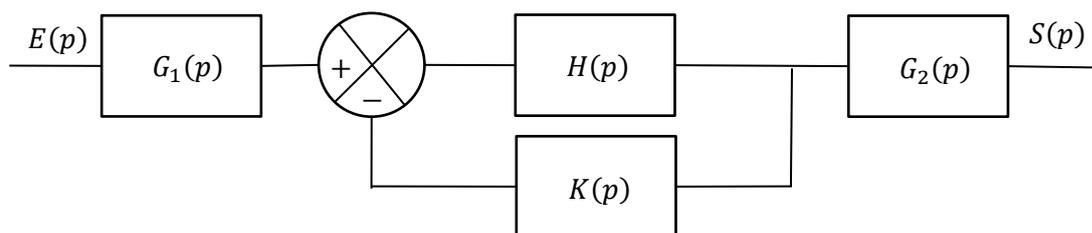
Démonstration :

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{E(p)} \quad ; \quad H_2(p) = \frac{S(p)}{I(p)}$$

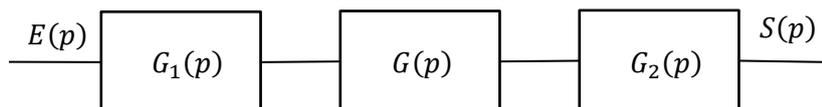
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{S(p)}{I(p)} \frac{I(p)}{E(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

A.III.1.d.ii Série de blocs avec partie bouclée

Soit le schéma bloc suivant :



Ce système peut se représenter ainsi :



Avec :

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

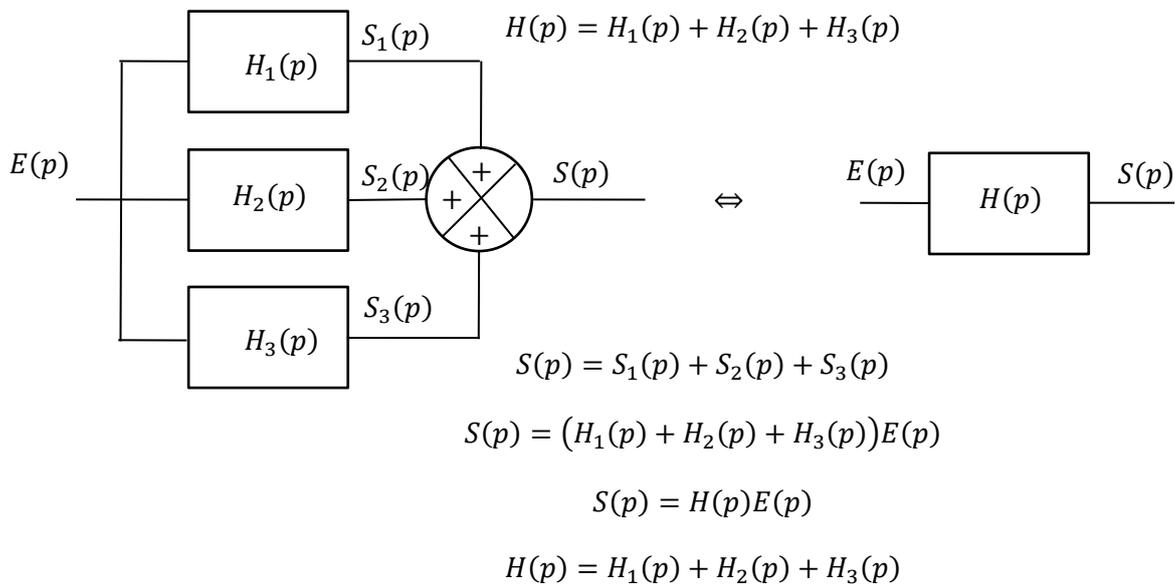
La fonction de transfert du système s'écrit donc comme suit :

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

$$M(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p)G(p)G_2(p) = \frac{G_1(p)H(p)G_2(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

Une erreur souvent commise consiste à inclure G_1 et/ou G_2 dans le calcul de la *FTBF* de la partie bouclée du système.

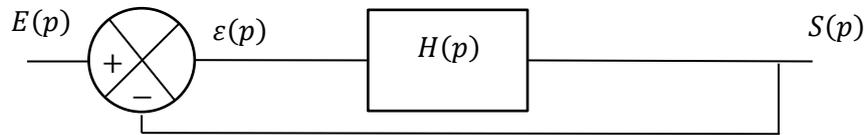
A.III.1.d.iii Association de blocs en parallèle



Dernière mise à jour 04/10/2017	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	--	-------------------------

A.III.1.d.iv Retour unitaire

Un système est à retour unitaire si la fonction de transfert de la chaîne retour est égale à 1. Le schéma bloc est alors de la forme :

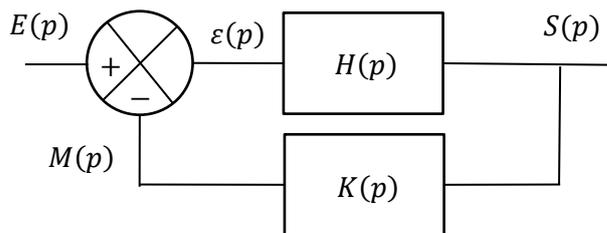


Dans le cas d'un système à retour unitaire, on a la relation :

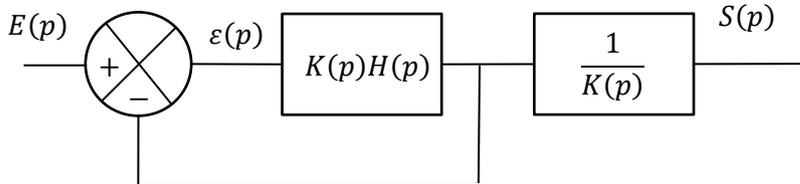
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$FTBO(p) = H(p) \text{ dans ce cas}$$

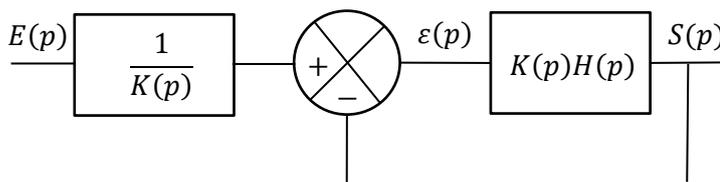
Lorsqu'un système n'est pas à retour unitaire, il est possible d'effectuer des manipulations afin de le représenter de manière équivalente avec un retour unitaire. En utilisant la formule de Black sur les trois schémas blocs suivants, on montre qu'ils représentent le même système et qu'ils sont donc équivalents.



$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$



$$G'(p) = \frac{1}{K(p)} \frac{K(p)H(p)}{1 + K(p)H(p)} = G(p)$$



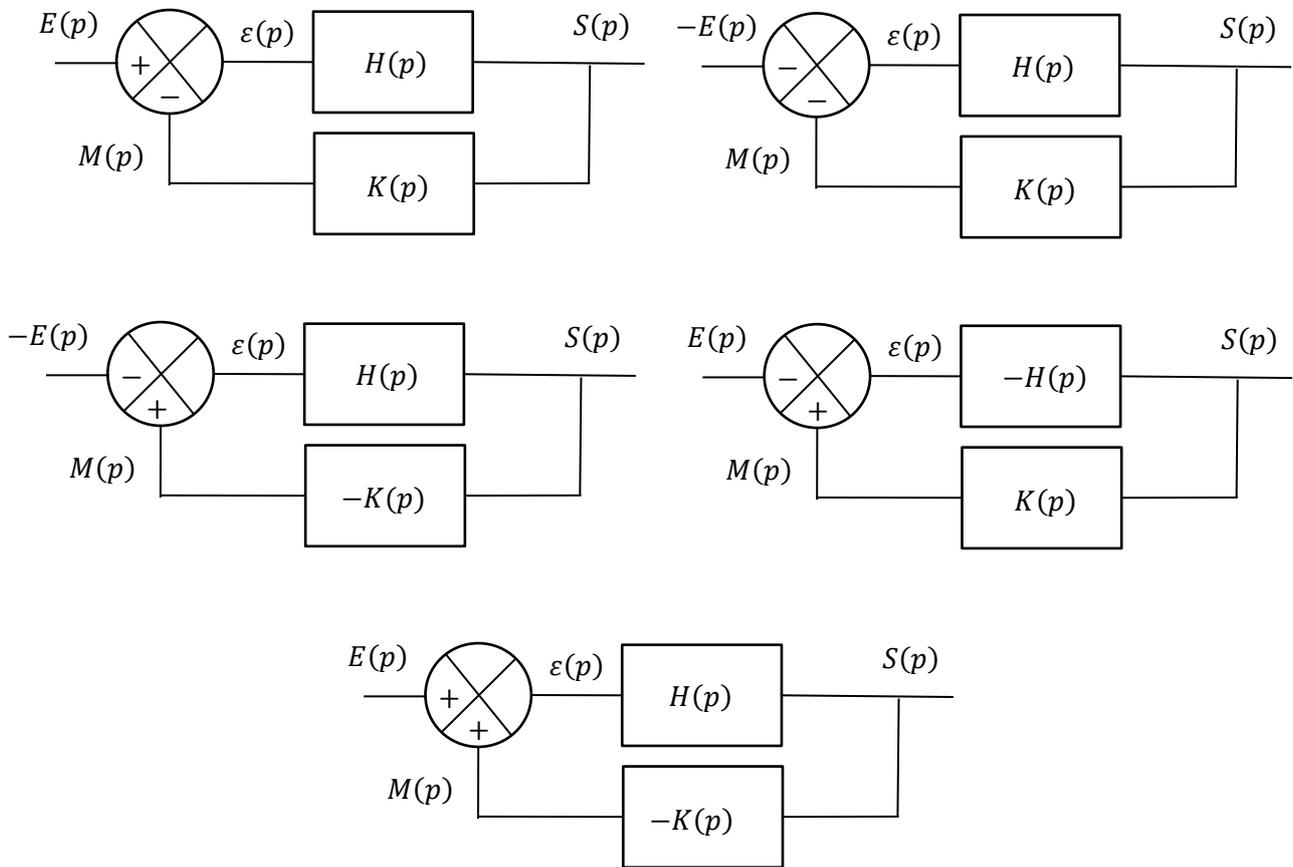
$$G''(p) = \frac{K(p)H(p)}{1 + K(p)H(p)} \frac{1}{K(p)} = G(p)$$

Cette transformation a deux avantages :

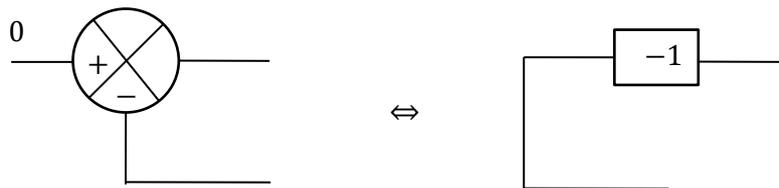
- Nous mettrons en place des résultats lors de l'étude des performances des SLCI qui seront associés aux boucles à retours unitaires
- L'abaque de Black-Nichols que nous verrons plus tard permettra de déterminer des caractéristiques fréquentielles de FTBF connaissant la FTBO (plus simple) d'une boucle à retour unitaire

A.III.1.d.v Changements de signes

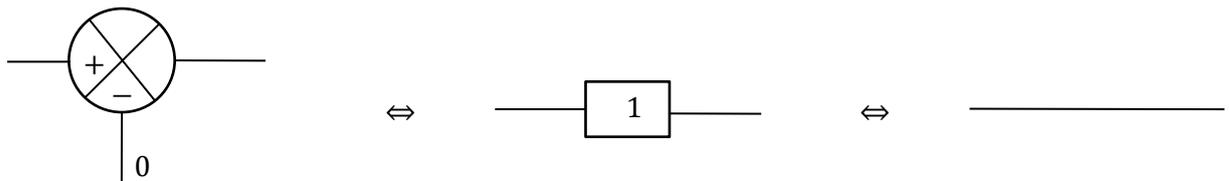
On peut effectuer des changements de signes sur les variables, les comparateurs ou les fonctions de transfert sans aucuns soucis. Tous ces schémas sont équivalents :



Lors de l'application d'un théorème de superposition, on peut obtenir le cas suivant si $E = 0$



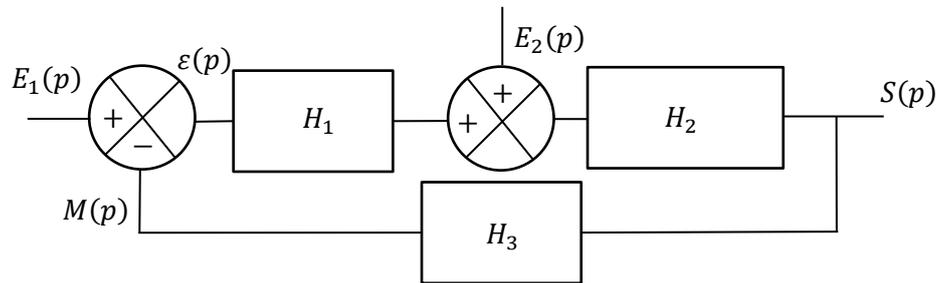
Remarque :



Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A.III.1.d.vi Théorème de superposition

Soit un système avec deux entrées :



La plupart du temps l'entrée E_1 est l'entrée de commande (consigne) et l'entrée E_2 est une perturbation qui vient « gêner » le processus.

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - M(p) = E_1(p) - H_3(p)S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)[H_1(p)\varepsilon(p) + E_2(p)]$$

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)H_1(p)\varepsilon(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p) + H_3(p)H_2(p)H_1(p)\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)] = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) - \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$\begin{aligned} H_3(p)S(p) &= E_1(p) - \varepsilon(p) \\ &= E_1(p) - \frac{1}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p) \\ &= \frac{H_3(p)H_2(p)H_1(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p) \end{aligned}$$

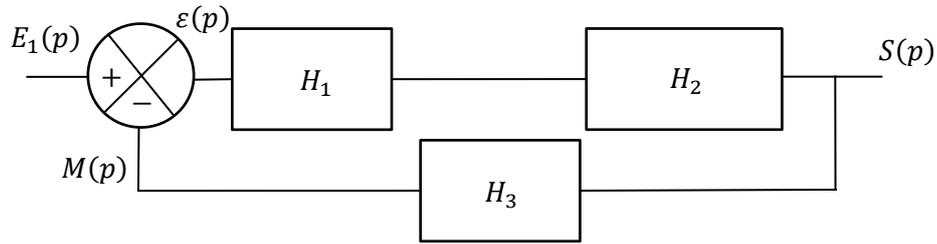
$$S(p) = \frac{H_2(p)H_1(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$S(p) = G_1(p)E_1(p) + G_2(p)E_2(p)$$

On voit ici que le système soumis à deux entrées répond par deux sorties ajoutées.

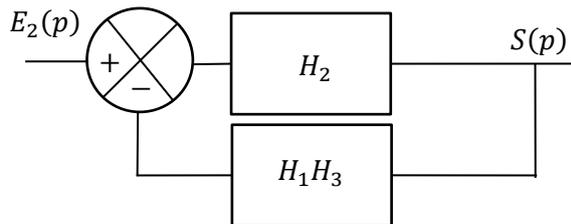
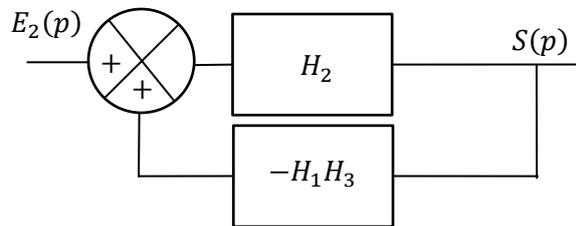
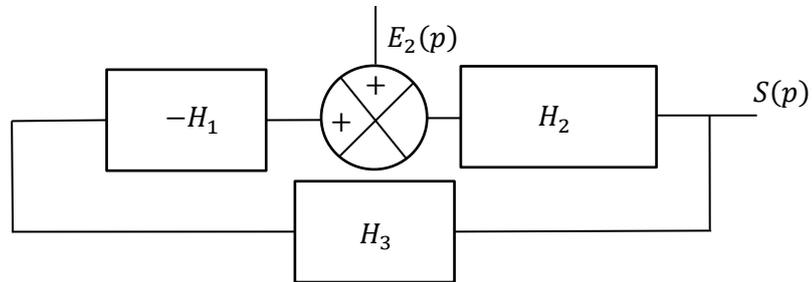
Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

Etudions le système lorsque $E_2(p)$ est nulle. Cela revient à l'enlever du schéma bloc :



$$\left. \frac{S(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = G_1(p)$$

Faisons de même en supposant que $E_1(p)$ est nulle :



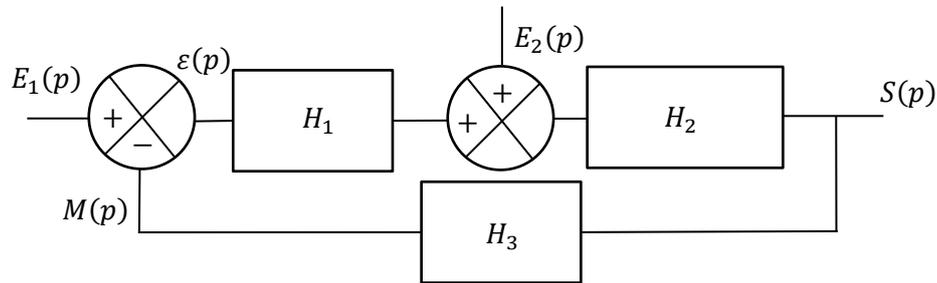
$$\left. \frac{S(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0} = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = G_2(p)$$

On voit donc ici que lorsqu'il y a plusieurs entrées sur un système, on peut utiliser le théorème de superposition en annulant tour à tour toutes les entrées sauf une et en déterminant la fonction de transfert associée.

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
04/10/2017		Cours

A retenir :

Pour un système mis sous la forme suivante :

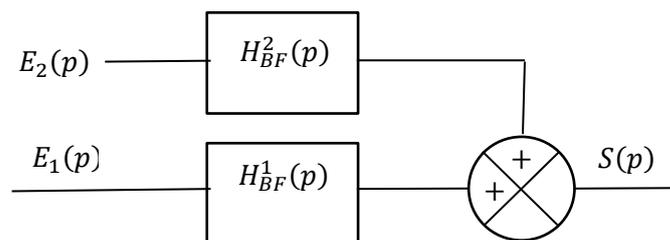


Les deux fonctions de transfert $\left. \frac{S(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0}$ et $\left. \frac{S(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0}$ ont comme dénominateur le même polynôme caractéristique : $1 + FTBO = 1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)$ et pour numérateur les fonctions en chaîne directe après l'entrée considérée, soit $H_1(p)H_2(p)$ pour $\left. \frac{S(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0}$ et $H_2(p)$ pour $\left. \frac{S(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0}$, soit :

$$H_{BF}^1(p) = \left. \frac{S(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\text{Chaîne directe après } E_1}{1 + FTBO(p)}$$

$$H_{BF}^2(p) = \left. \frac{S(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0} = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\text{Chaîne directe après } E_2}{1 + FTBO(p)}$$

On pourra alors proposer un nouveau modèle du système :



Remarque : Dans ce genre de système, on demande souvent d'estimer l'effet de la perturbation e_2 sur l'erreur ε entre entrée e_1 et sortie s .

On calcule donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_1(t) - s(t))$ avec $e_1(t)$ nulle et $e_2(t)$ non nulle, soit :

$$\varepsilon = - \lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t)) = - \lim_{p \rightarrow +0^+} (pS(p)) = - \lim_{p \rightarrow +0^+} (pH_{BF}^2(p)E_2(p))$$

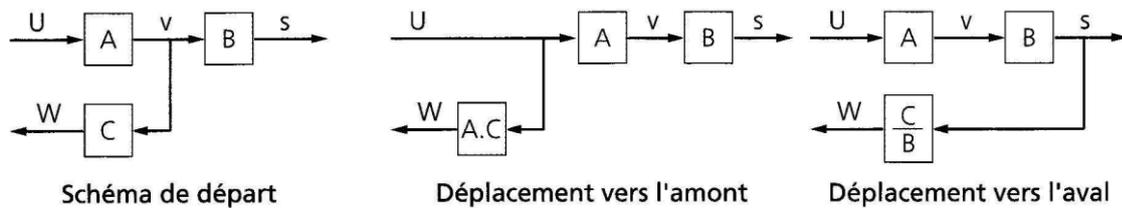
Dernière mise à jour 04/10/2017	Systemes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	--	-------------------------

A.III.1.d.vii Déplacement de points de jonction et des sommateurs

• Principe

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. La figure ci-dessous montre quelques schémas équivalents. L'inconvénient lié à la modification de la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

• Déplacement d'un point de mesure

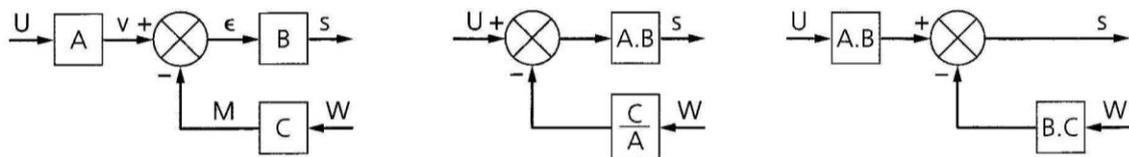


$$\begin{cases} W = CAU \\ S = BAU \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = ACU \\ S = BAU \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = \frac{C}{B}BAU = CAU \\ S = BAU \end{cases}$$

• Déplacement d'un sommateur



$$S = B\varepsilon = B(AU - CW)$$

$$S = ABU - CBW$$

$$S = AB\varepsilon = AB\left(U - \frac{C}{A}W\right)$$

$$S = ABU - CBW$$

$$S = \varepsilon = ABU - CBW$$

• Applications

Ces transformations permettent d'obtenir, sur des schémas blocs complexe avec des boucles imbriquées, des structures avec des boucles simples dont le calcul des FTBF est rendu possible.

A.III.1.d.viii Sommateur à plus de 2 entrées

Lorsqu'un sommateur possède plus de deux entrées, il est simple de le scinder en plusieurs sommateurs à la suite pour, par exemple, déterminer une FTBF.

